

## Un problema di elettromagnetismo in una cabina di guida di un treno

R. De Luca

*DIIMA - Università degli Studi di Salerno 84084 Fisciano (SA)*

E. De Nicolais

*GDN-consulting - Via S. Stefano 1, 84100 Cervinara (AV)*

### 1. Introduzione

Il treno può essere considerato il mezzo di locomozione con le migliori caratteristiche di comfort per due ragioni principali. Innanzitutto, quando il treno si muove a velocità costante in un tratto rettilineo, esso, secondo le leggi di invarianza Galileiana, riproduce un sistema di riferimento inerziale, in modo più fedele di quanto possa fare la stiva di una nave, come quella descritta nella famosa esposizione del principio d'inerzia da parte di Galileo Galilei nel *Dialogo sui due massimi sistemi del mondo* [1]. In secondo luogo, il vano passeggeri è ampio e permette all'utente di stare seduto comodamente o di muoversi con relativa libertà.

I treni, come tutti i mezzi di trasporto, hanno bisogno di una fonte di energia per la locomozione. Essendo questa energia di natura elettrodinamica, ecco che si propone un interessante problema di elettromagnetismo, quando andiamo a dare uno sguardo alla particolare configurazione della distribuzione dei cavi elettrici che trasportano corrente all'interno di un treno, così come mostrata in fig. 1. Notiamo, infatti, che nella cabina di comando un cavo di lunghezza finita (in rosso) è

posto verticalmente ad una distanza  $h$ , di qualche decina di centimetri, dal macchinista. Se supponiamo che la corrente  $I$  che fluisce in questo cavo abbia un andamento periodico nel tempo, è possibile chiedersi quali potrebbero essere le correnti indotte nel corpo del macchinista. Per affrontare questo problema adotteremo un modello in cui il macchinista è rappresentato nella sua posizione di guida e schematizzato attraverso semplici figure geometriche che rendano più semplice l'analisi, così come mostrato nella fig. 2.

Il lavoro è organizzato in due parti principali. Nella prima parte daremo il valore del campo magnetico nelle varie parti del corpo del conducente. In una seconda parte calcoleremo il flusso attraverso le varie sezioni del corpo e, supponendo che la corrente vari sinusoidalmente nel tempo, calcoleremo le correnti indotte in queste sezioni.

### 2. Definizione del problema e calcolo del campo di induzione magnetica

Consideriamo il conducente nella sua schematizzazione bidimensionale data in fig. 2. Ci chiediamo quale sia il valore del campo di induzione magnetica  $\vec{B}$ , generato dalla presenza del cavo di corrente

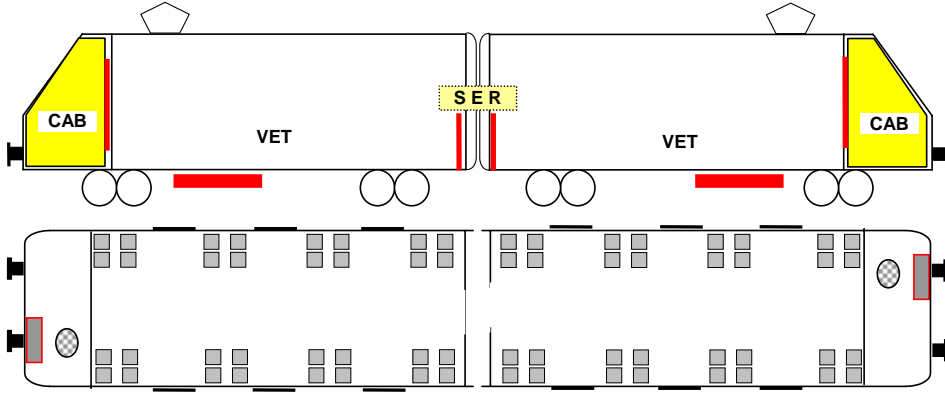


Fig. 1. - Sezioni di un treno visto di lato (sopra) e dall'alto (sotto). In rosso vengono indicati i cavi che trasportano corrente elettrica. Si noti un cavo verticale presente nella cabina di guida. Legenda: CAB = Cabina di Guida, VET = Vettura Viaggiatori, SER = Armadi di Servizio.

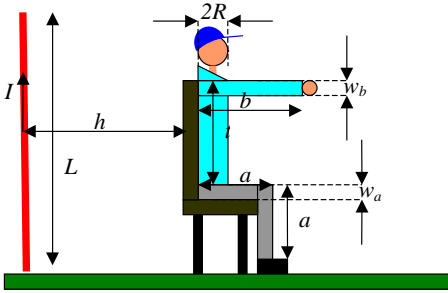


Fig. 2. - Un macchinista nella cabina di guida. Un cavo (in rosso) di lunghezza finita  $L$  è posto ad una distanza  $h$  dalla schiena del conducente. Il macchinista viene rappresentato in modo schematico, per poter più agevolmente svolgere i calcoli. Le dimensioni delle parti del corpo del conducente sono rappresentate in figura.

di lunghezza  $L$  posto ad una distanza  $h$  dalla schiena del conducente stesso, nelle varie sezioni del suo corpo.

Per rispondere a tale domanda, schematizziamo il problema come in fig. 3. Il valore del campo  $\vec{B}$  in un punto  $P$  a destra del cavo che trasporta la corrente può essere allora trovato attraverso la seguente formula [2]:

$$(1) \quad \vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi h} \left( \frac{l_1}{d_1} + \frac{l_2}{d_2} \right) \hat{n}_{AB},$$

ove  $\mu_0$  è la permeabilità magnetica del vuoto,  $l_1$  e  $l_2$  sono, rispettivamente, le distanze  $AH$  e  $HB$ , mentre  $d_1$  e  $d_2$  sono le distanze del punto  $P$  dagli estremi del cavo,  $A$  e  $B$ , rispettivamente. Nella (1), infine, il vettore  $\hat{n}_{AB}$  è ortogonale al piano individuato dal cavo e dal segmento  $HP$ . Se esprimiamo queste grandezze geometriche in termini delle coordinate  $x$  e  $y$ , facendo riferimento alla fig. 3, avremo

$$(2) \quad \vec{B}(x, y) = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \cdot \left( \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{L - y}{\sqrt{x^2 + (L - y)^2}} \right) \hat{n}_{AB}.$$

Considereremo, nel seguito, il vettore  $\hat{n}_{AB}$  ortogonale alle varie sezioni del corpo del macchinista individuate in fig. 3. Possiamo adesso dare una rappresentazione grafica del modulo  $B$  del campo magnetico nelle varie sezioni del corpo del macchinista, così come mostrata nelle fig. 4-8. Per poter effettuare un'analisi quantitativa, prendiamo i seguenti valori per le grandezze in gioco:  $h = 0,50$  m,  $L = 1,50$  m,  $I = 1,0$  A.

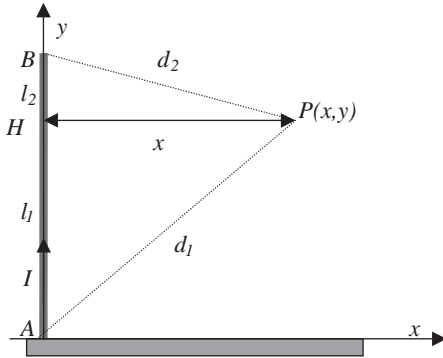


Fig. 3. – Il campo di induzione magnetica presente nella regione di spazio occupata dal macchinista, a causa della corrente che circola nel filo finito  $AB$ , può essere calcolato attraverso l'eq. (1), nella quale sono presenti le grandezze geometriche definite nella figura.

i) *Campo nella sezione della testa del macchinista*

In questo caso dobbiamo considerare il punto  $P$  nell'insieme chiuso seguente:

$$C = (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R\},$$

ove  $R$  è il raggio della sezione massima della testa del conducente ( $R \approx 15$  cm) e  $(x_0, y_0)$  è la posizione del centro di tale sezione ( $(x_0, y_0) \approx (0,65, 1,2)$  cm).

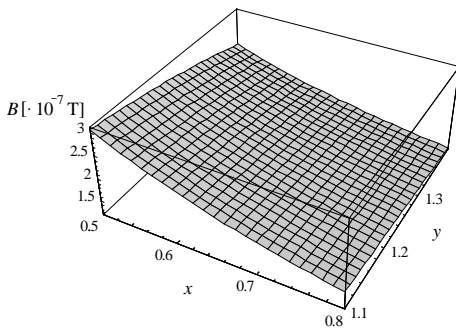


Fig. 4. – Il campo di induzione magnetica presente nel quadrato circoscritto alla sezione circolare massima della testa del macchinista.

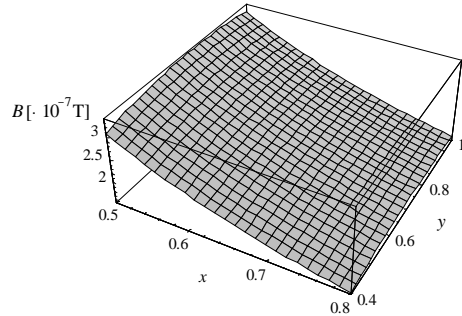


Fig. 5. – Il campo di induzione magnetica presente nella sezione rettangolare del tronco del macchinista.

In fig. 4 viene perciò rappresentato  $B$  nel quadrato circoscritto nella sezione circolare  $C$ .

ii) *Campo nella sezione del tronco del macchinista*

In questo caso il dominio da considerare per  $B$  è il seguente:

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / h \leq x \leq h + 2R; a \leq y \leq a + t\},$$

ove poniamo  $a$ , la lunghezza media di un arto inferiore, pari a 0,40 m. In fig. 5 viene perciò rappresentato  $B$  nella sezione rettangolare  $T$ .

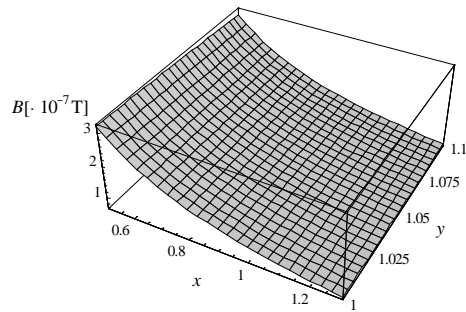


Fig. 6. – Il campo di induzione magnetica presente nella sezione rettangolare del braccio del macchinista.

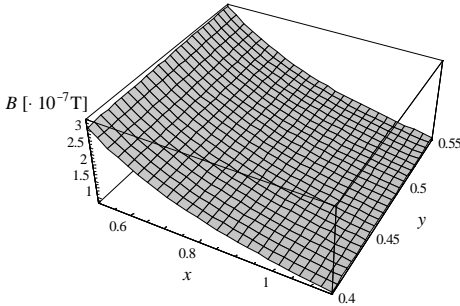


Fig. 7. – Il campo di induzione magnetica presente nella sezione rettangolare della coscia del macchinista.

iii) *Campo nella sezione del braccio del macchinista*

Consideriamo, in questo caso, il seguente dominio:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / h \leq x \leq h + b; \\ a + t \leq y \leq a + t + w_b\},$$

ove, indicando, nell'ordine, con  $b$  e  $w_b$  la lunghezza la larghezza media degli arti superiori, poniamo queste grandezze rispettivamente pari a 0,80 m e 0,10 m. In fig. 6 viene perciò rappresentato  $B$  nella sezione rettangolare  $A$ .

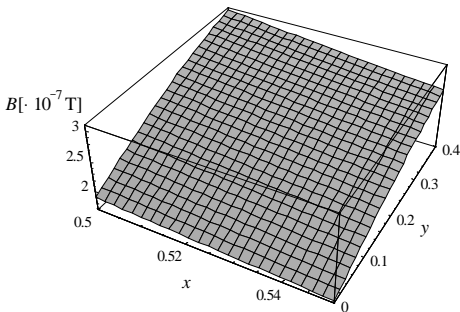


Fig. 8. – Il campo di induzione magnetica presente nella sezione rettangolare della gamba del macchinista.

iv) *Campo nella sezione della coscia del macchinista*

Il seguente dominio deve essere considerato in questo caso:

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / h \leq x \leq h + a - w_a; \\ a \leq y \leq a + w_a\},$$

ove, indicando con  $w_a$  la larghezza media della coscia, poniamo  $w_a = 0,15$  m. In fig. 7 viene rappresentato  $B$  nella sezione rettangolare  $F$ .

v) *Campo nella sezione della gamba del macchinista*

Il seguente dominio deve essere considerato in questo caso:

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / h \leq x \leq h + w_a; \\ 0 \leq y \leq a\},$$

ove, si indica ancora con  $w_a$  la larghezza media della gamba. In fig. 8 viene rappresentato  $B$  nella sezione rettangolare  $G$ .

### 3. Il flusso magnetico e le correnti indotte nelle varie parti del corpo del macchinista

Avendo ricavato il valore del campo  $\vec{B}$  nelle varie sezioni del corpo del macchinista, vogliamo adesso individuare l'entità della corrente indotta generata da una variazione della corrente  $I$  nel tempo. Supponendo che la corrente  $I$  vari in modo sinusoidale con frequenza  $\nu$ , riscriviamo il modulo del campo  $\vec{B}$  come segue per ottenere un risultato facilmente adattabile a tutte le parti del corpo del macchinista:

$$(3) \quad B(x, y) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} f(x, y),$$

ove, per la (2),

$$(4) \quad f(x, y) = \frac{1}{x} \cdot \left( \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{L - y}{\sqrt{x^2 + (L - y)^2}} \right).$$

Possiamo, in questo modo, più facilmente individuare il contributo dovuto alla variazione temporale della corrente  $I$ . Infatti possiamo scrivere il flusso del campo magnetico attraverso le sezioni del corpo del macchinista come segue:

$$(5) \quad \Phi(\vec{B}) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iint_S f(x, y) dx dy,$$

dove  $S$  è la particolare sezione che stiamo considerando. Notiamo che gli integrali, ancorché non semplici da calcolare (si veda l'Appendice per un cenno del calcolo di questi integrali di superficie), forniscono solo un prefattore numerico alla corrente. Se indichiamo con  $F_S$  l'integrale di superficie di  $f$ , scriviamo

$$(6) \quad \Phi(\vec{B}) = \frac{\mu_0 F_S}{4\pi} I.$$

Per la legge di Faraday-Neuman-Lenz, adesso, la forza elettromotrice indotta nel circuito di contorno di  $S$  sarà

$$(7) \quad \text{f.e.m.} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{\mu_0 F_S}{4\pi} \frac{dI}{dt}.$$

Conoscendo la lunghezza  $l$  e la sezione  $S_0$  del circuito ideale individuato dal percorso seguito dalla corrente, possiamo scrivere l'espressione per la corrente indotta  $I_{\text{in}}$  come segue:

$$(8) \quad I_{\text{in}} = -\frac{\mu_0 S_0 F_S}{4\pi \rho l} \frac{dI}{dt},$$

ove  $\rho$  è la resistività del mezzo nel quale si muove la corrente. Notiamo che, se

dividiamo per la sezione  $S_0$ , otteniamo un'espressione più semplice per la densità di corrente indotta

$$(9) \quad J_{\text{in}} = -\frac{\mu_0 F_S}{4\pi \rho l} \frac{dI}{dt}.$$

Finora non abbiamo inserito alcuna informazione relativa alla variazione nel tempo della corrente  $I$  nel cavo. Se però, come anticipavamo prima, assumiamo che essa vari nel tempo in modo sinusoidale, in modo che

$$(10) \quad I = I_0 \sin \omega t,$$

ove  $\omega = 2\pi\nu$ , allora si avrà

$$(11) \quad J_{\text{in}} = -\frac{\mu_0 F_S}{4\pi \rho l} \frac{dI}{dt} = -\frac{\mu_0 I_0 F_S \omega}{4\pi \rho l} \cos \omega t.$$

Notiamo che quanto più intenso è il campo in una data regione dello spazio tanto più grande sarà il valore di  $J_{\text{in}}$ . Ancora per la (11), il modulo di  $J_{\text{in}}$  dipende in modo lineare dalla frequenza  $\nu$ .

Per avere un'idea di alcuni aspetti quantitativi, prendiamo in esame il calcolo della corrente indotta nella sezione della testa del macchinista. Per fare ciò, supponiamo di aver già calcolato  $F_S$  (così come brevemente si fa cenno nell'Appendice). Possiamo equivalentemente esprimere la grandezza  $\frac{\mu_0 F_S}{4\pi} I_0$  come il prodotto tra il campo medio  $B_A$  e la sezione  $S = \pi R^2$ , ove  $R$  è il raggio della sezione stessa. In questo modo,  $l = 2\pi R$  e la (11) prende la forma seguente:

$$(12) \quad J_{\text{in}} = -\pi \frac{R B_A \nu}{\rho} \cos \omega t.$$

L'espressione di sopra chiarisce anche il ruolo che la geometria scelta gioca in

questo caso: la densità di corrente indotta con modulo maggiore è quella per la quale, tenendo fissi i valori delle altre grandezze nella (12), il percorso circolare risulta di raggio maggiore. È possibile adesso stimare l'ordine di grandezza del modulo di  $J_{\text{in}}$  nella (12) ponendo  $\frac{R}{\rho} \approx 0,04 \frac{1}{\Omega}$  [3],  $\nu = 50$  Hz, e stimando che il valor medio  $B_A$  del campo di induzione magnetica nella sezione della testa del macchinista sia di  $0,2 \mu\text{T}$ , otteniamo un valore di picco della densità di corrente pari a  $J_{\text{in}}^{(0)} = 1,26 \mu\text{A}/\text{m}^2$ . Generalizzando l'espressione (12) nel caso delle diverse sezioni, scriviamo, per i valori di picco delle densità di corrente:

$$(13) \quad J_{\text{in}}^{(0)} = \pi \sigma B_A \nu l_{\text{eff}},$$

ove  $\sigma$  è la conduttività della porzione del corpo del macchinista considerata e  $l_{\text{eff}}$  è una lunghezza efficace ( $l_{\text{eff}} = \frac{2S}{l}$ ). Per una sezione rettangolare, di lati  $a$  e  $b$ , si trova

$$(14) \quad l_{\text{eff}} = \frac{ab}{a+b}.$$

#### 4. Conclusioni

Problematiche legate alla sicurezza sul posto di lavoro sono di grande attualità oggi. Al veloce diffondersi della cultura della sicurezza sarebbe opportuno infondere, parallelamente, nell'operatore, una maggiore consapevolezza del rischio reale che l'utilizzo di un determinato strumento di lavoro può comportare. In questo scritto abbiamo voluto trattare un particolare problema sull'effetto dei campi elettromagnetici sul corpo umano, affrontandolo attraverso semplici considerazioni e partendo da concetti fisici di base. Abbiamo considerato un macchinista nella sua postazione di guida di un treno. Mediante la rilevazione

delle possibili sorgenti di campi elettromagnetici nella cabina di comando, abbiamo visto quali potrebbero essere le correnti indotte nelle varie parti del corpo del macchinista, descritto attraverso figure geometriche semplici.

La trattazione risulta fruibile da studenti che già posseggano le nozioni di base dell'elettromagnetismo. Le difficoltà di carattere matematico presenti nel problema vengono trattate in Appendice, per non appesantire la trattazione. Si trova che è possibile esprimere, per le varie sezioni schematiche del corpo del macchinista, il picco della densità di corrente indotta  $J_{\text{in}}^{(0)}$  attraverso la semplice relazione

$$J_{\text{in}}^{(0)} = \pi \sigma B_A \nu l_{\text{eff}},$$

ove  $B_A$  è il campo medio presente nella sezione,  $\sigma l_{\text{eff}}$  è la conduttanza del circuito attraverso il quale la corrente indotta fluisce e  $\nu$  è la frequenza del campo sorgente. Per tipiche condizioni di lavoro quando facciamo fluire una corrente di 1 A nel filo alle spalle del macchinista, posto a 1,5 m dalla sua schiena, si trova che la corrente indotta massima nelle varie sezioni del corpo del macchinista stesso è dell'ordine di  $1 \mu\text{A}/\text{m}^2$ .

#### Appendice

Diamo qui un cenno sul modo in cui può essere calcolato l'integrale di superficie

$$(A.1) \quad F_S = \iint_S f(x, y) \, dx dy,$$

ove la funzione  $f$  è data dalla (4), nel caso in cui consideriamo sezioni rettan-

golari del corpo del macchinista. Per sezioni circolari si può seguire un procedimento analogo, facendo però particolare attenzione alle definizioni degli estremi di integrazione.

Prendiamo, per fissare le idee, il tronco del macchinista. L'insieme sul quale integrare la funzione  $f$  è dunque il seguente:

$$(A.2) \quad T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / h \leq x \leq h + 2R; \\ ma \leq y \leq a + t\},$$

ove le lunghezze  $a$ ,  $h$ ,  $R$  e  $t$  sono costanti definite nel testo. Per il modo in cui è definita la funzione  $f$ , conviene porre

$$(A.3) \quad I(x) = \int_a^{a+t} \left( \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{L - y}{\sqrt{x^2 + (L - y)^2}} \right) dy,$$

cosicché

$$(A.4) \quad F_S = \int_h^{h+2R} \frac{1}{x} I(x) dx.$$

Notiamo che, se si definisse, nel caso della sezione circolare, una funzione dipendente da una singola variabile simile alla  $I(x)$  nella (A.4), anche gli estremi di integrazione dipenderebbero dalla variabile  $x$ .

Procediamo adesso a calcolare l'integrale nella (A.3). È immediato verificare che

$$(A.5) \quad I(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[ \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + (L - y)^2} \right]_{y=a}^{a+t},$$

cosicché si ha

$$(A.6) \quad I(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[ \sqrt{x^2 + (a + t)^2} - \sqrt{x^2 + (L - a - t)^2} - \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{x^2 + (L - a)^2} \right].$$

Notiamo allora che, quando si sostituisce la (A.6) nella (A.4), si ottengono quattro integrali del tipo seguente:

$$(A.7) \quad F_b = \int_h^{h+2R} \frac{\sqrt{x^2 + b^2}}{x} dx.$$

Cerchiamo allora la primitiva  $F(x)$  della funzione integranda nella (A.7). Si integri per parte, scegliendo come parte differenziale proprio  $dx$ , cosicché

$$(A.8) \quad F(x) = \sqrt{x^2 + b^2} + \int \frac{(b/x)^2}{\sqrt{1 + (b/x)^2}} dx.$$

Trasformiamo l'integrale nella (A.8) ponendo  $t = \frac{b}{x}$ . In questo modo otteniamo un integrale noto, potendo così scrivere

$$(A.9) \quad F(x) = \sqrt{x^2 + b^2} - b \int \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} = \sqrt{x^2 + b^2} - b \sinh^{-1} \left( \frac{b}{x} \right),$$

cosicché

$$(A.10) \quad F_b = \sqrt{b^2 + (h + 2R)^2} - b \sinh^{-1} \left( \frac{b}{h + 2R} \right) - \sqrt{b^2 + h^2} + b \sinh^{-1} \left( \frac{b}{h} \right).$$

Infine si ha

$$(A.11) \quad F_S = \\ = \frac{1}{2}[F_{a+t} - F_{L-a-t} - F_a + F_{L-a}].$$

### Bibliografia

- [1] Per una recente opera divulgativa sulla vita e sulle opere di Galileo, si consulti la collana *I grandi della Scienza*, edito da *Le Scienze: Galileo*, Vol. **1** (1998).
- [2] QUARTIERI J., e DE LUCA R., *G. Fis.* **45** (2004) 25.
- [3] DAWSON T. W., CAPUTA K. e STUCKLY M. A., *IEEE Trans. Power Delivery*, **13** (1998) 366.